



MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

OPERADORES: ADJUNTO Y NORMAL

En un espacio V con producto interno, cada operador lineal S tiene un operador llamado su *adjunto* (también lineal), que representamos con S^* y es tal que, para toda pareja $\bar{u}, \bar{v}$ de vectores de V , $(S(\bar{u})|\bar{v}) = (\bar{u}|S^*(\bar{v}))$. Esta definición está basada en el producto interno por lo que, el operador adjunto depende del producto interno considerado, es decir, el operador S tiene tantos adjuntos como productos internos se consideren, pero para cada uno el adjunto es único.

Obtendremos el adjunto del operador S en R^2 , tal que $S(x, y) = (2x - y, x + 3y)$ con respecto al producto usual en R^2 (producto punto). Si $\bar{u} = (x, y)$ y $\bar{v} = (a, b)$, debemos determinar $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que definen la regla del operador lineal S^* , esto es:

$$S^*(a, b) = (\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b).$$

$$(S(\bar{u})|\bar{v}) = ((2x - y, x + 3y)|(a, b)) = (2x - y)a + (x + 3y)b = x(2a + b) + y(-a + 3b).$$

$$(\bar{u}|S^*(\bar{v})) = x(\alpha a + \beta b) + y(\gamma a + \delta b), \text{ con esto llegamos a: } \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1, \delta = 3, \text{ es decir,}$$

$$S^*(a, b) = (2a + b, -a + 3b).$$

Si consideramos otro producto interno en R^2 , por ejemplo el definido por $(\bar{u}|\bar{v}) = 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2$, el adjunto de S es otro que llamaremos S_1^* y lo obtenemos a continuación:

$$(S(\bar{u})|\bar{v}) = 3(2x - y)a - (2x - y)b - (x + 3y)a + (x + 3y)b = x(5a - b) + y(-6a + 4b)$$

$$S_1^*(a, b) = (\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b).$$

$$(\bar{u}|S_1^*(\bar{v})) = 3x(\alpha a + \beta b) - x(\gamma a + \delta b) - y(\alpha a + \beta b) + y(\gamma a + \delta b) =$$

$$= x(3\alpha a + 3\beta b - \gamma a - \delta b) + y(-\alpha a - \beta b + \gamma a + \delta b)$$

Ya que $(S(\bar{u})|\bar{v}) = (\bar{u}|S_1^*(\bar{v}))$, se tiene:

$$5a - b = 3\alpha a + 3\beta b - \gamma a - \delta b = (3\alpha - \gamma)a + (3\beta - \delta)b$$

$-6a + 4b = -\alpha a - \beta b + \gamma a + \delta b = (-\alpha + \gamma)a + (-\beta + \delta)b$, esto es:

$$\begin{cases} 3\alpha - \gamma = 5 \\ -\alpha + \gamma = -6 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 3\beta - \delta = -1 \\ -\beta + \delta = 4 \end{cases} \text{ de donde } \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = -\frac{13}{2}, \quad \delta = \frac{11}{2}$$

Por lo tanto, $S_1^*(a, b) = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b, -\frac{13}{2}a + \frac{11}{2}b \right)$.

Una propiedad del operador adjunto (en nuestro ejemplo S^* , S_1^*) es que la matriz asociada a él referida a una base ortonormal de V es la transpuesta (si V es real) o la conjugada-transpuesta (si V es complejo) de la matriz referida a la misma base, asociada al operador original (en nuestro ejemplo S).

Una base ortonormal de R^2 respecto al producto punto es la canónica $B = \{(1,0), (0,1)\}$ y las matrices asociadas a S y S^* son respectivamente:

$$M(S) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } M(S^*) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = (M(S))^T$$

Para el producto interno en R^2 definido por $(\bar{u} | \bar{v}) = 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2$, con el cual

$$(\bar{u} | \bar{u}) = 2u_1^2 + (u_1 - u_2)^2, \text{ una base ortonormal de } R^2 \text{ es } A = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

La matriz asociada a S referida a A tiene por columnas los vectores de coordenadas respecto a A de las imágenes de los elementos de A . Esto es:

$$M_A^A(S) = \begin{bmatrix} [S(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)]_A & [S(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}})]_A \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de todo elemento (x, y) perteneciente a R^2 respecto a A son α y β tales que:

$$(x, y) = \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}} \right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \left(x - \frac{1}{3}y \right) \\ \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}y \end{cases}$$

$$[S(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)]_A = [(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})]_A = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}; \quad [S(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}})]_A = [(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{6}})]_A = \begin{bmatrix} -\frac{13}{3\sqrt{2}} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Por lo que $M_A^A(S) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{13}{3\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

$$M_A^A(S_1^*) = \begin{bmatrix} [S_1^*(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)]_A & [S_1^*(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}})]_A \\ [S_1^*(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)]_A = [(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{13}{2\sqrt{3}})]_A = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{13}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} ; \\ [S_1^*(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}})]_A = [(\frac{8}{2\sqrt{6}}, \frac{20}{2\sqrt{6}})]_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Por lo que } M_A^A(S_1^*) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{13}{3\sqrt{2}} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Del operador en el espacio complejo C^2 tal que $H(z, w) = (2iz + w, -z - 2iw)$ su adjunto H^* respecto al producto usual en C^2 (esto es: $(\bar{u} | \bar{v}) = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2$) es:

$H^*(z, w) = (\alpha z + \beta w, \gamma z + \delta w)$ donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$.

$$H(\bar{u}) = (2iu_1 + u_2, -u_1 - 2iu_2); \quad H^*(\bar{v}) = (\alpha v_1 + \beta v_2, \gamma v_1 + \delta v_2)$$

$$(H(\bar{u}) | \bar{v}) = (2iu_1 + u_2) \bar{v}_1 + (-u_1 - 2iu_2) \bar{v}_2 = u_1 (2i\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + u_2 (\bar{v}_1 - 2i\bar{v}_2) \dots \dots \dots (1)$$

$$(\bar{u} | H^*(\bar{v})) = u_1 (\bar{\alpha} v_1 + \bar{\beta} v_2) + u_2 (\bar{\gamma} v_1 + \bar{\delta} v_2) = u_1 (\bar{\alpha} \bar{v}_1 + \bar{\beta} \bar{v}_2) + u_2 (\bar{\gamma} \bar{v}_1 + \bar{\delta} \bar{v}_2) \dots \dots \dots$$

(2)

De igualar (1) con (2): $\bar{\alpha} = 2i, \quad \bar{\beta} = -1, \quad \bar{\gamma} = 1, \quad \bar{\delta} = -2i \quad \therefore \alpha = -2i, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2i$

$$H^*(\bar{u}) = (-2iu_1 - u_2, u_1 + 2iu_2).$$

Considerando el producto usual, una base ortonormal de C^2 es $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$ (la canónica): Respecto a ella:

$$M(H) = \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ -1 & -2i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M(H^*) = \begin{bmatrix} -2i & -1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix} = [M(h)]^*$$

Si se considera el producto interno en C^2 definido por $(\bar{u} | \bar{v}) = 2u_1 \bar{v}_1 + 5u_2 \bar{v}_2 \dots \dots \dots (I)$

$$(H(\bar{u}) | \bar{v}) = 2(2iu_1 + u_2) \bar{v}_1 + 5(-u_1 - 2iu_2) \bar{v}_2 = u_1 (4i\bar{v}_1 - 5\bar{v}_2) + u_2 (2\bar{v}_1 - 10i\bar{v}_2)$$

$$(\bar{u} | H_1^*(\bar{v})) = 2u_1 (\bar{\alpha} \bar{v}_1 + \bar{\beta} \bar{v}_2) + 5u_2 (\bar{\gamma} \bar{v}_1 + \bar{\delta} \bar{v}_2) = u_1 (2\bar{\alpha} \bar{v}_1 + 2\bar{\beta} \bar{v}_2) + u_2 (5\bar{\gamma} \bar{v}_1 + 5\bar{\delta} \bar{v}_2)$$

$$\text{De igualar } (H(\bar{u}) | \bar{v}) \text{ con } (\bar{u} | H_1^*(\bar{v})): \quad H_1^*(z, w) = \left(-2iz - \frac{5}{2}w, \frac{2}{5}z + 2iw \right)$$

Una base ortonormal de C^2 respecto al producto definido por (I) es:

$B = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 0 \right), \left(0, \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \right) \right\}$. Las coordenadas del elemento (z, w) respecto de B son α, β tales que

$$(z, w) = \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 0 \right) + \beta \left(0, \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \right) \quad \therefore \alpha = z(1-i); \quad \beta = w(2+i)$$

La matriz asociada a H referida a la base B es:

$$M_B^B(H) = \begin{bmatrix} [H(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 0)]_B & [H(0, \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i)]_B \end{bmatrix}$$

$$[H(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 0)]_B = (i-1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)_B = \begin{bmatrix} 2i \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{bmatrix}$$

$$[H(0, \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i)]_B = (\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i)_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ -2i \end{bmatrix} \quad \therefore M_B^B(H) = \begin{bmatrix} 2i & \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i & -2i \end{bmatrix}$$

El matriz asociada a H_1^* referida a B es: $M_B^B(H_1^*) = \begin{bmatrix} [H_1^*(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 0)]_B & [H_1^*(0, \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i)]_B \end{bmatrix}$

$$[H_1^*(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 0)]_B = (1-i, \frac{1}{5} + \frac{1}{5}i)_B = \begin{bmatrix} -2i \\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \end{bmatrix}$$

$$[H_1^*(0, \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i)]_B = (-1 + \frac{1}{2}i, \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i)_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$M_B^B(H_1^*) = \begin{bmatrix} -2i & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i & 2i \end{bmatrix} = [M_B^B(H)]^*, \text{ es decir, es la conjugada-transpuesta de la asociada a } H$$

referida a la base B .

Otro operador que aquí presentamos es el llamado *operador normal*. Éste se define como aquel cuya composición con su adjunto es conmutativa, esto es: T es normal si $T \circ T^* = T^* \circ T$. Debido a que para cada producto interno considerado el adjunto es diferente, un operador puede ser normal respecto a un producto interno y no serlo respecto a otro.

Un ejemplo de operador normal en R^2 respecto al producto punto es K tal que $K(x, y) = (2x - y, -x + 5y)$ pues, como puede comprobarse $K^* = (2x - y, -x + 5y)$ y se tiene

$$(K \circ K^*)(x, y) = (5x - 7y, -7x + 26y) = (K^* \circ K)(x, y)$$

Operadores como K que tiene un adjunto idéntico a él, suelen llamarse *autoadjuntos*. Sin embargo, respecto a otro producto interno como el definido por:

$$(\overline{u}|\overline{v}) = 2u_1v_1 + 3u_2v_2, \quad \text{el adjunto de } K \text{ es } K_1^*(x, y) = (2x - \frac{3}{2}y, -\frac{2}{3}x + 5y), \quad \text{con el cual}$$

$$(K \circ K_1^*)(x, y) = (\frac{14}{3}x - 8y, -\frac{16}{3}x + \frac{53}{2}y); \quad (K_1^* \circ K)(x, y) = (\frac{11}{2}x - \frac{19}{2}y, -\frac{19}{3}x + \frac{77}{3}y).$$

Debido a que $(K \circ K_1^*)(x, y) \neq (K_1^* \circ K)(x, y)$, el operador K no es normal respecto al producto considerado.

Otro ejemplo de operador normal en el espacio complejo C^2 respecto al producto usual es H cuya regla se define con: $H(z, w) = (2iz + w, -z - 2iw)$; su adjunto es $H^*(z, w) = (-2iz - w, z + 2iw)$, para el cual $(H \circ H^*)(z, w) = (5z, 5w) = (H^* \circ H)(z, w)$ por lo que, H es normal.

El mismo H , respecto al producto considerado anteriormente $(\overline{u}|\overline{v}) = 2u_1\overline{v}_1 + 5u_2\overline{v}_2$ no es normal, pues $(H \circ H_1^*) \neq (H_1^* \circ H)$.

Como último ejemplo tenemos al operador J en el espacio complejo C^3 cuya regla es $J(z, w, v) = (iw + (1+i)v, iz - 2iv, (-1+i)z - 2iw)$. El adjunto J^* respecto al producto usual en C^3 es:

$$J^*(z, w, v) = (-iw + (-1-i)v, -iz + 2iv, (1-i)z + 2iw) \text{ y resulta:}$$

$$(J \circ J^*)(z, w, v) = (3z + (-2+2i)w - 2v, (-2-2i)z + 5w + (1-i)v, -2z + (1+i)w + 6v) = (J^* \circ J)(z, w, v)$$

Por lo que J es un operador normal respecto al producto interno usual en C^3 .

LEDA SPEZIALE SAN VICENTE
PROFESORA DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

RESEÑA HISTÓRICA SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

PARTE SEGUNDA

Leibniz descubrió la técnica de separación de variables en 1691: Mostró cómo se resuelve la ecuación diferencial

$$y \frac{dx}{dy} = f(x)g(y).$$

De igual manera, redujo en el mismo año la ecuación homogénea $dy/dx = f(y/x)$ a una ecuación de variables separables de primer orden del modo usual: con el cambio $y = vx$. En 1694, Leibniz, publicó la resolución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

En 1694, Leibniz y Jean Bernoulli estudiaron el problema de encontrar la familia de curvas que cortan con un ángulo dado a una familia de curvas dadas. Jean Bernoulli señaló que este problema es importante para determinar las trayectorias de los rayos de luz que recorren un medio no uniforme porque dichos rayos cortan ortogonalmente los llamados frentes de luz. El problema fue resuelto de forma general e

independiente por Leibniz y por Jean Bernoulli en 1698. El método empleado se sigue usando actualmente.

Jean Bernoulli planteó el problema de determinar el movimiento de un proyectil en un medio cuya resistencia es proporcional a una potencia de la velocidad. La ecuación diferencial es en este caso

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^n.$$

También fueron identificadas las ecuaciones diferenciales de primer orden exactas, es decir, las ecuaciones $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ para las cuales existe una función $z = z(x, y)$ tal que $dz = Mdx + Ndy$. Clairaut en 1739 dio la condición $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$; esta misma condición fue dada de forma independiente por Euler en 1734. Si se tiene

$$dz = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

como remarcaron Euler y Clairaut, la solución es $z = cte$.

Cuando una ecuación de primer orden no es exacta, es posible muchas veces multiplicarla por una función, llamada *factor integrante*, que la convierta en exacta. Aunque se había usado esta técnica en lagunas ecuaciones, fue Euler en 1734 quien se dio cuenta que este concepto proporcionaba un método de integración e introdujo las expresiones que actualmente se usan. Clairaut amplió la teoría poco más tarde. Hacia 1740 se conocían los métodos elementales de resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Naturalmente, el estudio de diversos fenómenos modelados por ecuaciones diferenciales no se redujo a las de primer orden, como se describirá en la tercera y última parte..

(Continuará)

MARGARITA RAMÍREZ GALINDO
PROFESORA DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

Referencias:

- 1) *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. George F Simmons. Ed. McGraw-Hill
- 2) *El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad.
- 3) *Ecuaciones Diferenciales*. Editorial Ciencia y Técnica, La Habana.

<http://www.dcb.fi-c.UNAM.mx>

erik2306@servidor.unam.mx

Por razones de austeridad, a partir de este ejemplar, el tiraje del boletín se reduce a la mitad. Se agradece a los lectores su comprensión y se les invita a visitar la página WEB donde encontrarán todos los ejemplares publicados desde abril de 1981.